Zadania na XVI Podkarpacki Konkurs Matematyczny im. Franciszka Leji

Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum)

Etap powiatowy

6 lutego 2016 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek: $4a^4 + 14b^2 + c^2 + d^2 - 4a^2b - 4bc + 6bd = 0$, to $b + c + d = 0$.

2. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których prosta o równaniu $y = (m - 3)x + m + 2$ przecina parabolę o równaniu $y = x^2 + (2m + 2)x + m + 6$ w dwóch różnych punktach o pierwszych współrzędnych x_1, x_2 spełniających warunek $x_1^2 + x_2^2 \leq 17$.

3. W trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej AB, wybrano punkt S, dla którego trójkąty SAB, SBC i SAC mają równe pola. Wiedząc, że $SA^2 + SB^2 = 5$, oblicz SC.

4. Wykaż, że liczba $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \ldots + 3^{90}$ jest podzielna przez 4, 7 i 13.

5. Dany jest kwadrat ABCD o boku długości 4. Na bokach AB, BC, CD i DA umieszczono odpowiednio punkty K, L, M i N takie, że AN = 1, CM = 2 i BK = 3BL. Oblicz pole czworokąta KLMN wiedząc, że wyrażenie $KL^2 + LM^2 + MN^2 + NK^2$ osiąga najmniejszą możliwą wartość?

Powodzenia!